



TITLE:

KP方程式における線ソリトンの不安定性に関する直接数値計算 (非線形波動現象の数理と応用)

AUTHOR(S):

塩崎, 峻介; 村上, 洋一

CITATION:

塩崎, 峻介 ...[et al]. KP方程式における線ソリトンの不安定性に関する直接数値計算 (非線形波動現象の数理と応用). 数理解析研究所講究録 2009, 1645: 157-167

ISSUE DATE:

2009-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140667>

RIGHT:

KP 方程式における線ソリトンの不安定性に関する直接数値計算

阪府大工 塩崎峻介 (Shunsuke Shiozaki), 村上洋一 (Youichi Murakami)

Department of Aerospace Engineering

Osaka Prefecture University

1 はじめに

1 次元のソリトン系では、ソリトンは微小攪乱に対して安定であるばかりでなくソリトン同士の衝突においてもその構造を保つといった非常に安定な性質がある。そのように 1 次元的に安定な構造が 2 次元的な攪乱（すなわち、進行方向に対して横方向に変化する攪乱）に対して安定かどうかという問題がある。

K-dV ソリトンに対するこの問題は Kadomtsev and Petviashvili[1] によって既に 1970 年に取り扱われている。彼らは、ソリトンの進行方向よりも緩やかな横方向の変化を取り入れて、K-dV 方程式を 2 次元に拡張した方程式を導いた。この方程式は可積分系であることが後に示された [2,3]。以下、KP 方程式と呼ぶことにする。KP 方程式に関連した最近の結果については Oikawa and Tsuji[4] に詳しい。

この方程式を基にして、横方向の長波長攪乱に対するソリトンの線形安定性を漸近展開で調べたような結果を得た。

- 媒質が負の分散のとき（位相速度が長波長であるほど大きい。例としては水面上の重力波がある。）ソリトンは安定である。
- 媒質が正の分散のとき（位相速度が短波長であるほど大きい。例としては水面上の表面張力波がある。）ソリトンは不安定である。

これらの結果は、ソリトンが局所的に斜めに傾いたときの位相速度の増減を考えると理解できる。傾くと位相速度が増大するならその部分が傾いていない部分に追いつくので、元の状態に戻る。すなわち安定になる。逆に、減るなら傾きが徐々に大きくなるので、不安定になる。

正の分散の場合に、1 次元的なソリトン（以下、線ソリトンと呼ぶ。）が不安定になったらどのような現象が生じるかが次の問題になる。それに関して、線ソリトン以外の厳密解が存在していることを指摘しておく必要がある。正の分散の場合は代数ソリトン [5] と呼ばれる 2 次元的に局在した解が存在することが知られ、この構造が 1 列に無限に並んだ周期ソリトンと呼ばれる解も得られている [6-8]。これらは負の分散のときには存在していないので、不安定現象と何らかの関係があるかもしれない。

実はこの問題にも既に取り扱われている。Zakharov[9] および Zhdanov[10] が横方向の任意の波数（長波長に限らない）の攪乱に対する線形安定解析を行っており、固有値（増幅率）の表式を解析的に導いている。この方法を用いると、攪乱が成長したあとどのような現象が生じるかも示すことができる。結論から述べると、不安定な線ソリトンはより振幅の小さな線ソリトンと周期ソリトンに分裂することが解析的に示されている。

この方法では線ソリトンに 1 つの不安定モードが攪乱として与えられた場合の時間発展しか記述できず、一般の攪乱が与えられた時の時間発展を記述できない。そこで、本研究では以下のより一般の攪乱：

- (A) 有限の大きさの 1 つの不安定モード
- (B) 1 つの周期を持つ微小な正弦波形
- (C) 2 つの微小な不安定モード

に対して、線ソリトンがどのように不安定化するかを調べるために、初期値問題の時間発展を数値シミュレーションによって調べ、一般的な不安定性の発展に対する理解の手がかりを得ることを目的とする。

2 線ソリトンと不安定モード

ここでは、初期条件として用いる線ソリトンと不安定モード (固有関数) の表式と増幅率を与える。導出の方法は田尻、村上 [11] および塩崎、村上 [12] に与えられているので、ここでは結果のみを示す。

x 方向に進行する孤立波を表す線ソリトン解は

$$U = \frac{\alpha_0^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{2} \quad (1)$$

と表される。ただし、

$$\xi = \alpha_0 x + \Omega t - \xi_0, \quad \Omega = \alpha_0^3 \quad (2)$$

である。ここで、 α_0 と ξ_0 は定数である。

不安定モード (固有関数) は

$$\tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{KL}} \operatorname{sech} \tilde{\xi}_0 \left\{ 2\alpha_0^2 \operatorname{sech}^2 \tilde{\xi}_0 - \alpha_0^2 - \alpha_L^2 + 2\alpha_0 \alpha_L \tanh \frac{1}{2} \tilde{\xi}_L \tanh \tilde{\xi}_0 \right\} \cosh \frac{1}{2} \tilde{\xi}_L \cos(\delta y + \theta). \quad (3)$$

で表され、対応する線形増幅率 (固有値) は

$$\gamma = 2\delta \sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta}. \quad (4)$$

である。ただし、

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 2\alpha_P + \alpha_L, \\ \delta &= \alpha_P (\alpha_P + \alpha_L), \\ K &= \frac{(\alpha_P + \alpha_L)^2}{\alpha_L (2\alpha_P + \alpha_L)}, \\ L &= \frac{(\alpha_P - \alpha_L)^2 - (\delta/\alpha_P)^2}{(\alpha_P + \alpha_L)^2 - (\delta/\alpha_P)^2}, \\ \tilde{\xi}_0 &= \tilde{\xi}_P + \tilde{\xi}_L/2 + \sigma_0, \\ \tilde{\xi}_P &= \alpha_P x + \frac{1}{2} \log L, \\ \tilde{\xi}_L &= \alpha_L x + \log L, \\ \sigma_0 &= \log \left(\sqrt{K}/2\alpha_P^2 \right). \end{aligned}$$

である。 α_0 と δ を与えると、 α_P と α_L が決まり他のパラメータも決定される。

3 数値シミュレーションの方法

この研究では、線ソリトンが不安定になる過程について明らかにすることを目的にしているので、空間領域は無限に広がっているのが望ましい。しかし、数値シミュレーションを行う上で無限に広い領域を用意することはできないため、 x, y 方向について周期境界条件を適用する。 x 方向は、初期条件で与えられる線ソリトンのテールが十分小さくなる周期を適用し、 y 方向は、線ソリトンに攪乱として与えられる固有関数の y 方向の周期と同じ周期を適用する。

このため、直接数値シミュレーションする場合は空間に関してはフーリエ・ガラーキン法を用いる。時間に関しては 4 次のルンゲ=クッタ法を適用し、精度の向上及び数値スキームの安定化のために、線形項については積分因子法を用いる。詳しい内容は前回の研究会の講義録 [12] に説明されている。

表1 有限の大きさの1つの不安定モードにおける計算条件

領域 (x 方向)	領域 (y 方向)	空間刻み (x 方向)	空間刻み (y 方向)	時間刻み
$0 < x < 6\pi$	$-\pi/\delta < y < \pi/\delta$	1024	256	5.0×10^{-6}

表2 各ケースにおける ε の値と線ソリトンと攪乱の大きさの比

	ε	$\hat{E}(0)/E(0)$
(i)	6.139×10^{-7}	0.248×10^{-6}
(ii)	6.139×10^{-3}	0.248×10^{-2}
(iii)	6.139×10^{-2}	0.248×10^{-1}
(iv)	6.139×10^{-1}	0.248×10^0

4 数値シミュレーションの結果

4.1 有限の大きさの1つの不安定モード

初期条件は,

$$u = U + \varepsilon \hat{u} \quad (5)$$

で与えられる。ここで、 U は線ソリトン、 \hat{u} は攪乱を表し、 ε は攪乱の大きさを変化させるための定数である。ここでは ε の値を変え、攪乱の大きさにより攪乱を伴う線ソリトンがどのように時間発展するかを観察した。

なお、線ソリトンと攪乱の大きさをそれぞれ

$$E(t_n) = \sqrt{\sum_{k=0}^{NX-1} \sum_{l=0}^{NY-1} (U_{k,l}^n)^2}, \quad \hat{E}(t_n) = \sqrt{\sum_{k=0}^{NX-1} \sum_{l=0}^{NY-1} (u_{k,l}^n - U_{k,l}^n)^2}$$

と定義する。ここで、 k, l はそれぞれ x, y 方向の波数を表し、 $t_n = ndt$ であり、 $U_{k,l}^n$ は線ソリトンのフーリエ成分の複素振幅であり、 $u_{k,l}^n - U_{k,l}^n$ は攪乱のフーリエ成分の複素振幅に対応する。

攪乱は、式 (3) で与えられ、 $\delta = 9/\sqrt{3}$ 、 $\alpha_0 = 6.196$ で与えられ、解析的に得られる攪乱の増幅率は $\gamma = 43.608$ である。計算条件を表1に示す。表2に示した4つの場合について、数値シミュレーションを行った。

まず、各ケースにおける時間 t_n と攪乱の大きさ $\hat{E}(t_n)$ との関係を、図1に示す。図中の実線は数値シミュレーション結果から得られた攪乱の大きさの時間発展を示しており、破線は攪乱が解析による増幅率で成長した場合の時間発展を示している。(i) のように攪乱の大きさ ε が十分小さいと、図1(a) の $0 \leq t_n \leq 0.15$ において、 $\hat{E}(t_n) = \exp(a + bt_n)$ として、最小二乗法により b を求めると、 $b = 43.61$ となり、解析値との誤差は 0.0046% となり、十分精度よく一致している。これは、数値スキームが正しいことを支持している。攪乱が大きくなると、攪乱の成長率と解析値との誤差は、(ii) 2.02% 、(iii) 2.3% のように増大する。また、増幅率がより大きい方にずれることがわかる。

次に、線ソリトン分裂後の様子について述べる。ここでは、時間発展の様子が大きく異なる (i) と (iv) について述べる。(i) の初期条件の形と分裂後の形を図2に示す。(i) では、解析解による時間発展と同様に元の線ソリトンが、より振幅の小さい線ソリトンと周期ソリトンとに分裂することが確認できる。また、図3にケース (iv) での時間発展の様子を示す。図3(a) から図3(c) より、時間発展直後から、元の線ソリトンの後方にリップルが生じることがわかる。また、図3(d) より、後方に残った線ソリトンの中央にピークが残っていることがわかる。

4.2 1つの周期を持つ微小な正弦波形

ここでは、線ソリトンに正弦波形の攪乱を与え、どのように時間発展するかを観察した。初期条件は、

$$u = U + \varepsilon \hat{u}$$

表 3 1つの周期を持つ微小な正弦波形における計算条件

領域 (x 方向)	領域 (y 方向)	空間刻み (x 方向)	空間刻み (y 方向)	時間刻み
$0 < x < 6\pi$	$-\pi/\delta < y < \pi/\delta$	1024	512	5.0×10^{-6}

表 4 2つの微小な不安定モード

領域 (x 方向)	領域 (y 方向)	空間刻み (x 方向)	空間刻み (y 方向)	時間刻み
$0 < x < 6\pi$	$-\pi/\delta_2 < y < \pi/\delta_2$	1024	512	5.0×10^{-6}

とする。ただし、

$$U = \frac{\alpha_0^2}{2} \operatorname{sech}^2 \tilde{\xi}_0,$$

$$\hat{u} = (1 + \cos \delta y) U$$

とする。計算条件を表 3 に示す。ここでは、 $\alpha_0 = 6.19$, $\delta = 4.0$ とした。図 4 に分裂後の形を示す。図 4 において元の線ソリトンは、1つの線ソリトンと1つの周期ソリトンに分裂している。この結果は、1つの微小な不安定モードを攪乱として入れた場合と非常に似ている。ここで、分裂後の線ソリトンの x 方向の波数を α'_L 、周期ソリトンの x 方向の波数を α'_P とおく。また、線ソリトンのピークと周期ソリトンのピークはそれぞれ

$$\frac{\alpha_L^2}{2}, \quad 2\alpha_P^2 \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K}-1} \quad (6)$$

で与えられる。図 4 での線ソリトンのピークは 11.26 であるため、式 (6) より、 $\alpha'_L = 4.746$ が得られ、同様に周期ソリトンのピークは 117.9 であるため、式 (6) より、 $\alpha'_P = 0.735$ が得られる。(ii) における線ソリトン U に対する不安定モードは $\alpha_L = 4.727$, $\alpha_P = 0.732$ で与えられている。それぞれの相対誤差は、 $\alpha_L : 0.410\%$, $\alpha_P : 0.21\%$ であり、わずかなずれはあるものの、与えた攪乱の周期と同じ周期を持つ不安定モードが顕著に成長したと考えられる。

4.3 2つの微小な不安定モード

ここでは、線ソリトンに増幅率の異なる 2つの不安定モードを与え、どのように時間発展するかを観察した。初期条件は、

$$u = U + \varepsilon \hat{u}_1 + \varepsilon \hat{u}_2$$

とする。ただし、 \hat{u} は不安定モードを表し、式 (3) で与えられる。図 5 に今回採用した、2つの不安定モードの y 方向の波数 δ と、増幅率 γ のを示す。図中の実線は、 $\alpha_0 = 6.19$ としたとき、共鳴条件を満たしたときの δ と γ の関係を表している。図中に示すように、 $\delta_1 = 8.0$, $\delta_2 = 4.0$ である。これは、数値シミュレーションを行う上で、 y 方向について無駄な領域を確保しないために、 $\delta_1 : \delta_2 = 2 : 1$ とした。したがって、 y 方向に確保する領域は $2\pi/\delta_2$ となる。

ここでは、いきなり 2つの攪乱を加えた場合について検討するのではなく、まず、初期の時刻において次の 4 つ場合について数値シミュレーションを行い、それぞれを比較することで議論を進める。

- (i) $u = U + \varepsilon \hat{u}_1$,
- (ii) $u = U + \varepsilon \hat{u}_2$,
- (iii) $u = U + \varepsilon \hat{u}_1 + \varepsilon \hat{u}_2$ ($|\hat{u}_1| = |\hat{u}_2|$),
- (iv) $u = U + \varepsilon \hat{u}_1 + \varepsilon \hat{u}_2$ ($|\hat{u}_1| < |\hat{u}_2|$).

以上の 4 つのケースでは表 4 の計算条件を用いた。また、攪乱の大きさは (iii) を基準に考え、 $\varepsilon_1 = 2.73 \times 10^{-7}$, $\varepsilon_2 = 7.68 \times 10^{-7}$ とした。(iv) では ε_2 の値を 5 倍した (以下 ε は省略する)。

図 6 に (i) の時間発展の様子を示す。 \hat{u}_1 に対して y 方向に 2 周期分の領域を確保しているので、2つの周期ソリトンと 1つの線ソリトンに分裂する。ここで、分裂後の線ソリトンを u_{LS1} 、周期ソリトンを u_{PS1} と呼ぶことにする。このと

き、次のように時間発展したことがわかる。

$$u = U + \hat{u}_1 \rightarrow u_{LS1} + u_{PS1},$$

ここで、 u_{LS1} の x 方向の波数を α_{L1} とおき、 u_{PS1} の x 方向の波数を α_{P1} 、 y 方向の波数を δ_1 とおく。また、 U の x 方向の波数を α_0 とおく。このとき、次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_{L1} + 2\alpha_{P1}, & (x \text{ 方向の波数の関係}) \\ \frac{\delta_1}{\alpha_{P1}} &= \alpha_{P1} + \alpha_{L1}. & (\text{線ソリトンと周期ソリトンの共鳴条件}) \end{aligned}$$

上記の式を連立させ、 α_{P1} と α_{L1} について解くと、以下を得る。

$$\alpha_{P1} = \frac{\alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta_1}}{2}, \quad \alpha_{L1} = \mp \sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta_1}. \quad (7)$$

(i) では $\alpha_0 = 6.19$, $\delta_1 = 8.0$ であるため。式 (7) より、 $\alpha_{P1} = 4.352, 1.838, \mp 2.513$ である。(i) では準共鳴状態を考慮し、攪乱 \hat{u}_1 の不安定モードの中で $\alpha_{P1} = 1.837$, $\alpha_{L1} = 2.516$ を用いている。(i) において、数値シミュレーションにより得られた分裂後 ($t = 0.5$) の線ソリトンのピークは、3.165 である。式 (6) より、 $\alpha_L^2/2 = 3.165$ を解くと、 $\alpha_L = 2.516$ となり、これは $\alpha_{L1} = 2.513$ とあっている。(i) において、数値シミュレーションにより得られた分裂後 ($t = 0.5$) の周期ソリトンのピークは、72.12 である。式 (6) を 72.12 とおき、 α_P について解くと $\alpha_P = 1.851$ となり、 $\alpha_{P1} = 1.837$ と近い値であるが、少しずれている。これは、周期ソリトンは鋭いピークを持つため、そのピークをとらえきれないためと考えられる。(i) の数値シミュレーションは与えた攪乱に対して、解析解と同じ時間発展を再現できているとみなす。

図 7 に (ii) の時間発展の様子を示す。攪乱の y 方向周期と計算領域が等しいために周期ソリトンが 1 つ生じる。(i) と同様に、分裂後の線ソリトンを u_{LS2} 、周期ソリトンを u_{PS2} と呼ぶことにすると、次のように時間発展したことがわかる。

$$u = U + \hat{u}_2 \rightarrow u_{LS2} + u_{PS2}.$$

ここで、 u_{LS2} の x 方向の波数を α_{L2} とおき、 u_{PS2} の x 方向の波数を α_{P2} 、 y 方向の波数を δ_2 とおく。また、同様に、

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_{L2} + 2\alpha_{P2}, & (x \text{ 方向の波数の関係式}) \\ \frac{\delta_2}{\alpha_{P2}} &= \alpha_{P2} + \alpha_{L2}. & (\text{線ソリトンと周期ソリトンの共鳴条件}) \end{aligned}$$

が成り立ち、以下を得る。

$$\alpha_{P2} = \frac{\alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta_2}}{2}, \quad \alpha_{L2} = \mp \sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta_2}. \quad (8)$$

詳しい比較は省略するが、数値計算によると $\alpha_L = 4.727$, $\alpha_P = 0.7320$ と求められ、解析による $\alpha_{L2} = 4.754$, $\alpha_{P2} = 0.7347$ とほぼ一致するので、(i) と同様に解析解と一致することが明らかになった。

図 8 に、(iii) の時間発展の様子を示す。まず、 $t = 0.3$ 付近から攪乱が成長し始める。その後、 $t = 0.33$ で線ソリトンの中央と端にピークが同時に現れ始め、 $t = 0.37$ では、さらに中央のピークが成長し始める。最終的には、振幅が小さい線ソリトンと 2 種類の周期ソリトンとに分裂する。このとき、後方の線ソリトンのピークが 3.123 であり、中央の周期ソリトンのピークが 117.2 であることから、それぞれ u_{LS1} と u_{PS2} と同じものであるとみなす。(i),(ii) のどちらにも現れない領域の端に生じた周期ソリトンを u_{PS3} とおき、次のように時間発展したと仮定する。

$$\begin{aligned} u &= U + \hat{u}_1 + \hat{u}_2 \rightarrow u_{LS1} + u_{PS1} + (\hat{u}_2)' \\ &\rightarrow u_{LS1} + u_{PS3} + u_{PS2}. \end{aligned} \quad (9)$$

すなわち、 $(\hat{u}_2)'$ は u_{PS1} に対する微小な不安定モードであり、 u_{PS1} は u_{PS3} と u_{PS2} に分裂すると仮定する。このとき、以下の関係を満たしている。

$$\alpha_{P1} = \alpha_{P2} + \alpha_{P3}, \quad (x \text{ 方向の波数の関係式}) \quad (10)$$

$$\delta_1 = \delta_2 + \delta_3, \quad (y \text{ 方向の波数の関係式}) \quad (11)$$

$$\frac{\delta_2}{\alpha_{P2}} = \frac{\delta_3}{\alpha_{P3}} + \alpha_{P2} + \alpha_{P3}. \quad (\text{周期ソリトン同士の共鳴条件}) \quad (12)$$

ただし, α_{P3} , δ_3 はそれぞれ, u_{PS3} の x 方向の波数と y 方向の波数である. 式 (7) と式 (8) を式 (10) に代入し, α_{P3} を求めると, 以下を得る.

$$\alpha_{P3} = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta_2} \mp \sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta_1} \right), \quad \frac{1}{2} \left(\sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta_2} \pm \sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta_1} \right). \quad (13)$$

ここで, $\alpha_0 = 6.19$, $\delta_2 = 4.0$, $\delta_1 = 8.0$ を式 (13) に代入するとそれぞれ,

$$\alpha_{P3} = -1.105, -3.619, 3.619, 1.105 \quad (14)$$

が得られる. また, 式 (11) に $\delta_1 = 8.0$, $\delta_2 = 4.0$ を代入し, δ_3 を求めると

$$\delta_3 = 4.0 \quad (15)$$

となる. 数値シミュレーションによる u_{P3} のピークは 51.83 であり, 先ほどと同様に求めると, $\alpha_P = 1.098$ となる. これは解析解の $\alpha_{P3} = 1.105$ に対応していると考えられる. したがって, 式 (9) の仮定は正しいとみなせる.

次に, 図 9 に (iv) の時間発展の様子を示す. まず, $t = 0.3$ 付近から攪乱が成長し始める. その後, $t = 0.33$ で線ソリトンの中央のピークが成長し始め, $t = 0.35$ から領域端でもピークが成長し始める. 最終的には, (iii) と同様に, 振幅が小さい線ソリトンと 2 種類の周期ソリトンとに分裂する. このとき, 後方の線ソリトンのピークが 2.982 であり, 中央の周期ソリトンのピークが 118.2 であることから, それぞれ u_{LS1} と u_{PS2} と同じものであるとみなし, 領域の端に生じた周期ソリトンを u_{PS4} とおき, 次のように時間発展したと仮定する.

$$\begin{aligned} u &= U + \hat{u}_1 + \hat{u}_2 \\ &\rightarrow u_{LS2} + (\hat{u}_1)' + u_{PS2} \\ &\rightarrow u_{LS1} + u_{PS4} + u_{PS2}. \end{aligned} \quad (16)$$

すなわち, $(\hat{u}_1)'$ は u_{LS2} に対する微小な不安定モードであり, u_{LS2} は u_{PS4} と u_{LS1} に分裂すると仮定する. このとき, 以下の関係を満たしている.

$$\alpha_{L2} = 2\alpha_{P4} + \alpha_{L1}, \quad (x \text{ 方向の波数の関係式}) \quad (17)$$

$$\frac{\delta_4}{\alpha_{P4}} = \alpha_{P4} + \alpha_{L1}. \quad (\text{線ソリトンと周期ソリトンの共鳴条件}) \quad (18)$$

ただし, α_{P4} , δ_4 はそれぞれ, u_{PS4} の x 方向の波数と y 方向の波数である. 式 (7) と式 (8) を式 (17) に代入し, α_{P4} を求める.

$$\alpha_{P4} = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta_2} \mp \sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta_1} \right), \quad \frac{1}{2} \left(\sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta_2} \pm \sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta_1} \right). \quad (19)$$

この表式は, 式 (13) と一致している. また, 式 (18) より

$$\delta_4 = \delta_1 - \delta_2 \quad (20)$$

で与えられる. 数値シミュレーションによる u_{P4} のピークはであり, $\alpha_P = 1.107$ となる. これは解析解の $\alpha_{P4} = 1.105$ に対応していると考えられる. (iii) と同様に, 式 16 の仮定は正しいとみなせることが明らかになった.

(iii) と (iv) の結果を比較すると, 式 (13) と式 (19), 式 (11) と式 (20) はそれぞれ一致している. つまり, $\delta_4 = \delta_3$, $\alpha_{P4} = \alpha_{P3}$ であり, $u_{PS4} = u_{PS3}$ ということがわかる. これより, 線ソリトンに 2 つの微小な不安定モードを攪乱として与え, その大きさをそれぞれ変化させたとしても, 最終的に現れる 3 つのソリトンは同じであることが明らかになった.

なお, α_{P3} , δ_3 は α_0 , δ_1 , δ_2 により決定されるため, 元の線ソリトンと 2 つの不安定モードを与えると, 新たに生じる 2 つの周期ソリトンと線ソリトンが解析的に与えられることが明らかになった.

5 まとめ

- (1) 攪乱が有限である場合, 攪乱の中で不安定モードに近似できる部分は成長して周期ソリトンになり, それ以外はリップルとして現れることが明らかになった.
- (2) 周期を持った攪乱の場合はその周期に対応する不安定モードが顕著に成長することが明らかになった.
- (3) 2つの微小な不安定モードを与えた場合, 不安定化の過程は初期の攪乱の振幅に依存するが, 最終的に現れる3つのソリトンは同じであることが明らかになった. また, 元の線ソリトンと2つの不安定モードのパラメータから, 新たに生じる2つの周期ソリトンと線ソリトンは解析的に与えられることが明らかになった.

参考文献

- [1] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili: Sov. Phys. Dokl. **15** (1970) 539.
- [2] V. E. Zakharov and A. E. Shabat: Funct. Anal. Appl. **8** (1974) 226.
- [3] J. Satsuma: J. Phys. Soc. Jpn. **40** (1976) 286.
- [4] M. Oikawa and H. Tsuji: Fluid Dyn. Res. **38** (2006) 868.
- [5] S. V. Manakov, V. E. Zakharov, L. A. Bordag, A. R. Its and V. E. Matveev: Phys. Lett. **A63** (1977) 205.
- [6] L. A. Abramyan and Yu. A. Stepanyants: Radiophys. and Quantum Electron. **28** (1985) 26.
- [7] M. Tajiri and Y. Murakami: J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 3585.
- [8] M. Tajiri and Y. Murakami: Phys. Lett. **A143** (1990) 217.
- [9] V. E. Zakharov: Sov. Phys. JETP Lett. **22** (1975) 172.
- [10] S. K. Zhdanov: Sov. Phys. Dokl. **30** (1985) 769.
- [11] 田尻昌義, 村上洋一: 数理解析件講究録 782 (1992) 206.
- [12] 塩崎峻介, 村上洋一: 数理解析件講究録 1594 (2008) 166.

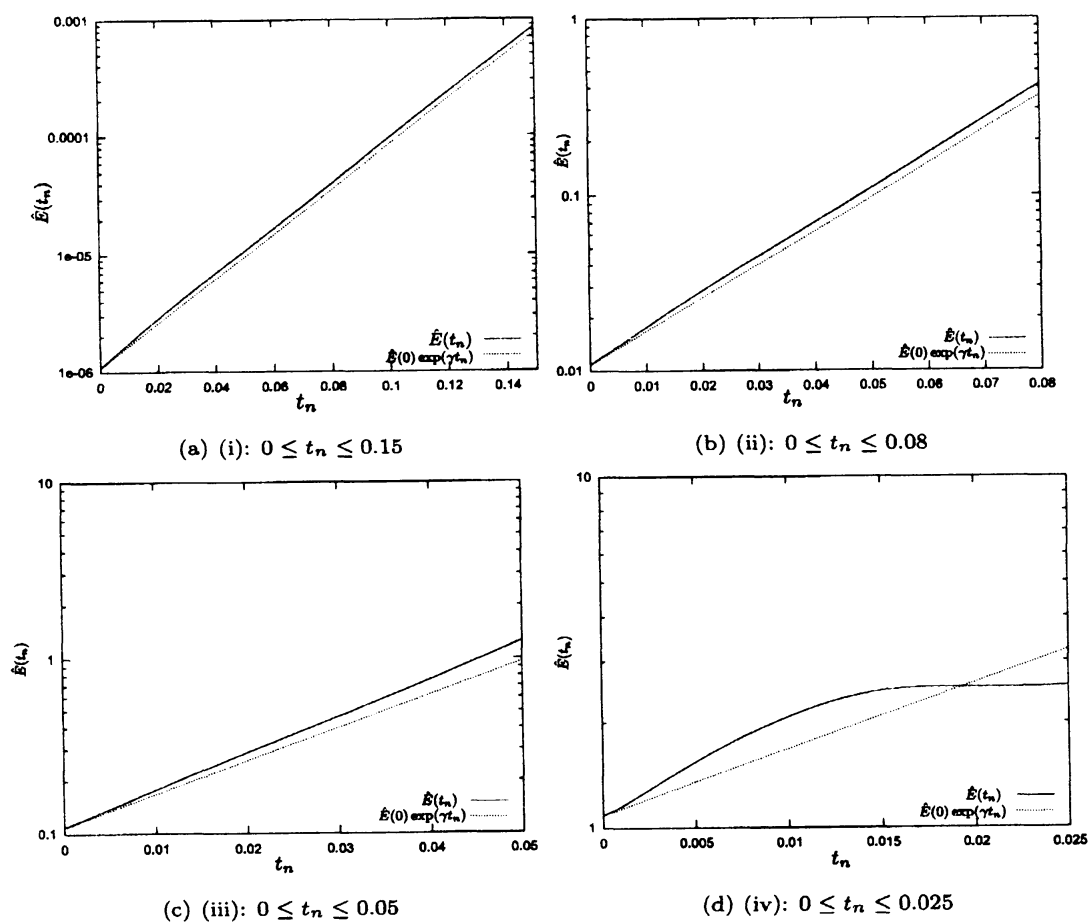


図 1 擾乱の成長率と線形増幅率

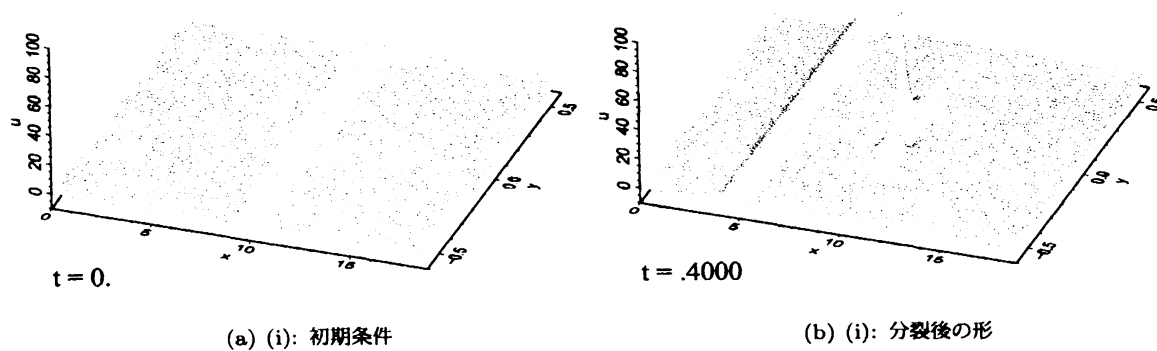


図 2 (i) における初期条件と分裂後の形

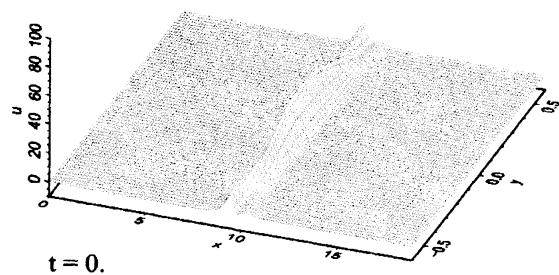
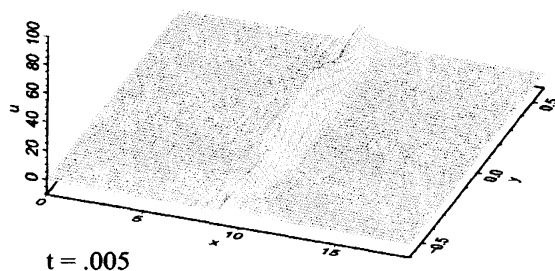
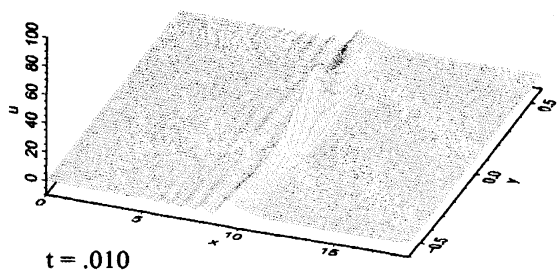
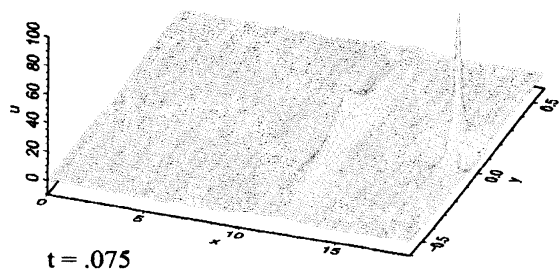
(a) $t = 0$ (b) $t = 0.005$ (c) $t = 0.01$ (d) $t = 0.75$

図3 (iv) の時間発展

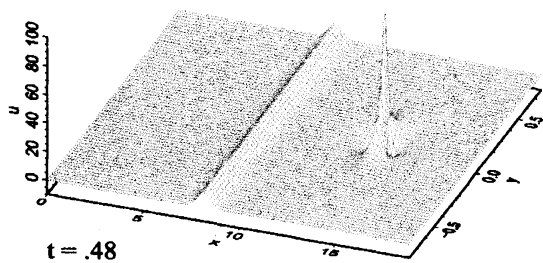


図4 1つの周期を持つ微小な正弦波形における分裂後の形

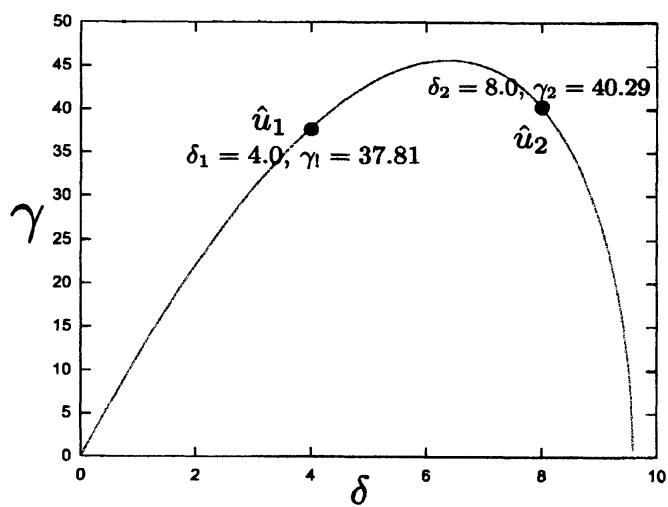


図5 増幅率の異なる2つの不安定モード

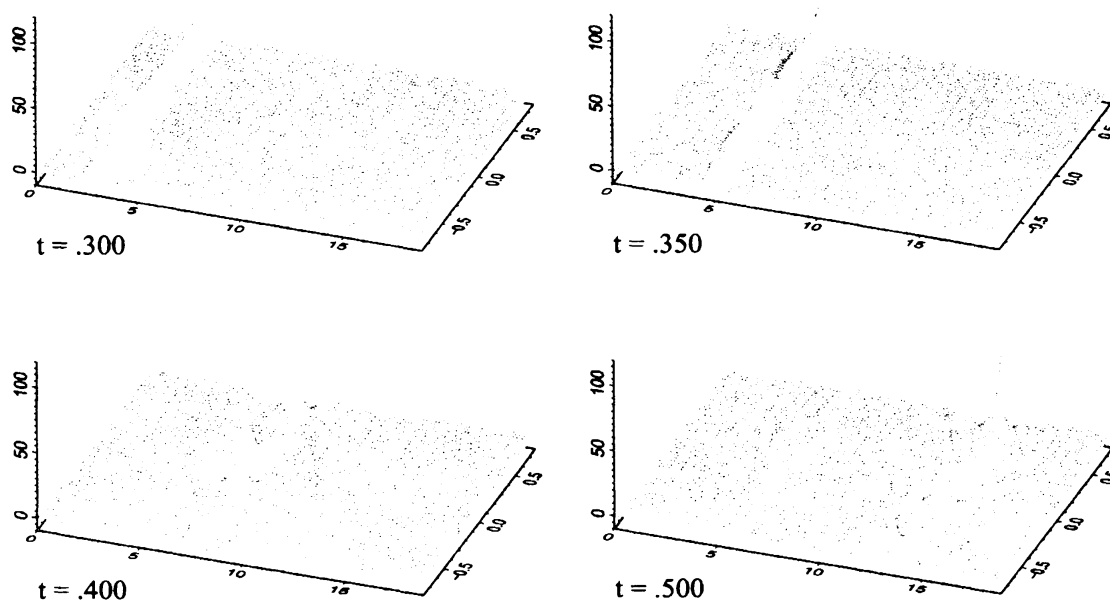


図 6 (i) の時間発展

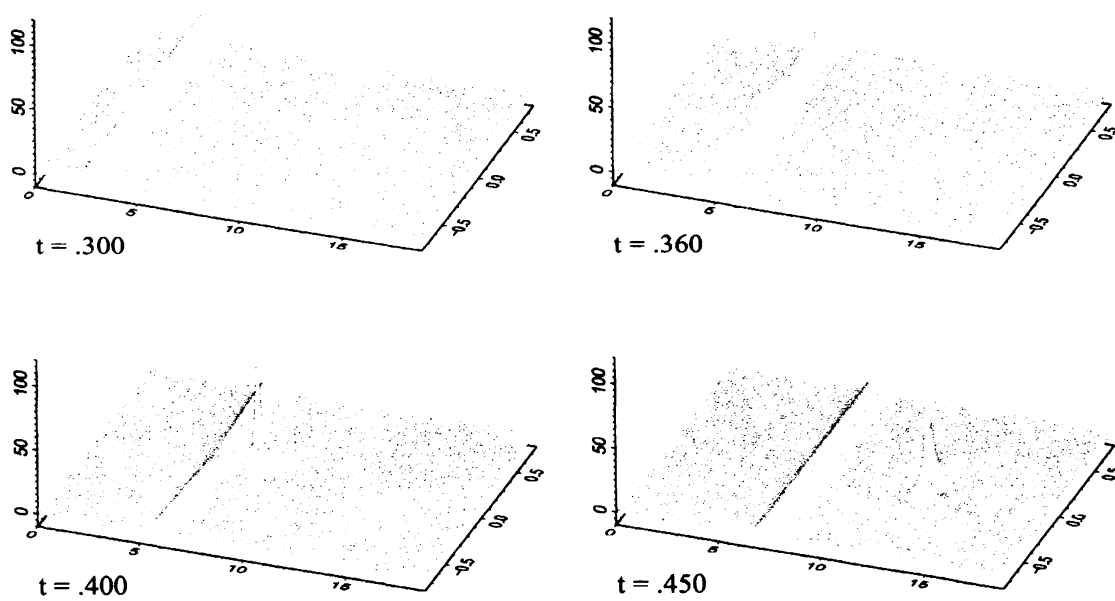


図 7 (ii) の時間発展

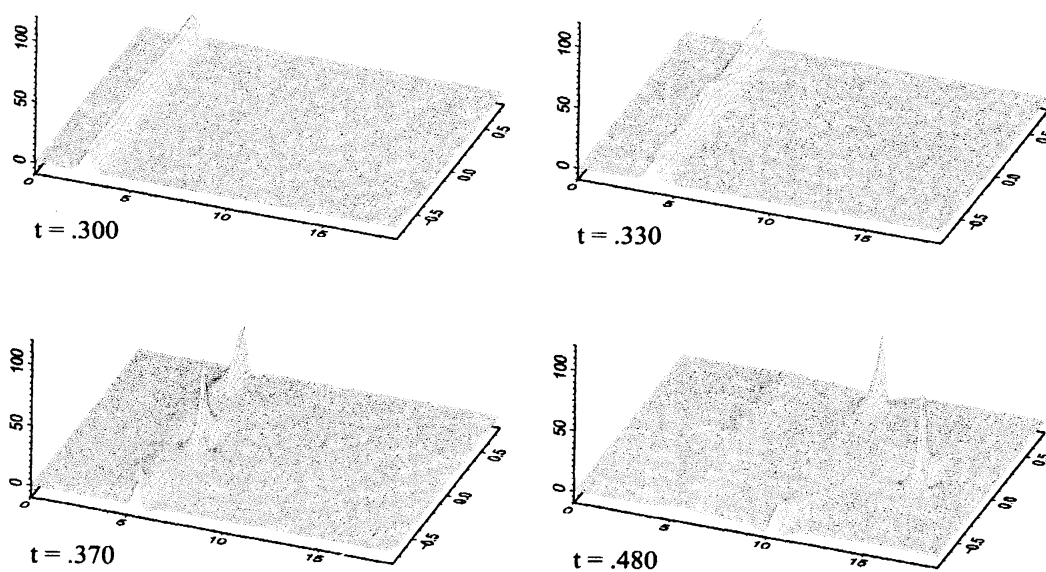


図 8 (iii) の時間発展

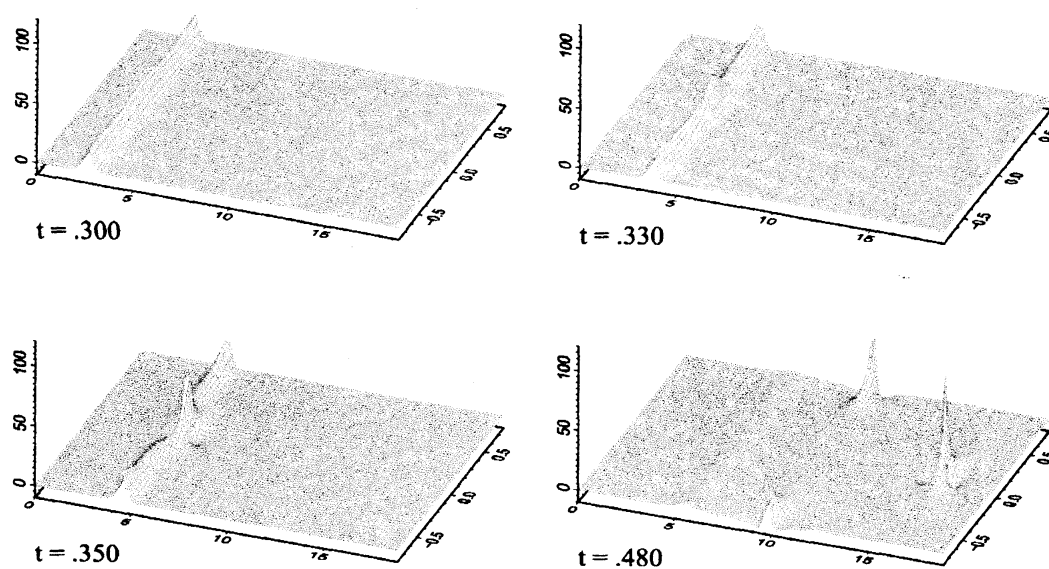


図 9 (iv) の時間発展